2015/2016 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

8 класс

1. По кольцевой дороге курсируют с одинаковыми скоростями и равными интервалами по 12 минут несколько троллейбусов. Сколько троллейбусов надо добавить, чтобы при той же скорости интервалы между троллейбусами уменьшились на одну пятую?

2. К числу 357 приписали справа 3 цифры так, чтобы получившееся шестизначное число делится на 3, 5, 7 одновременно. Найдите все такие числа.

3. Липецкие кондитеры для участников межвузовской олимпиады по математике изготовили плитку шоколада размером 9×223 квадратных долек. Сколько разломов надо сделать (одновременно ломается один кусок), чтобы разломить эту плитку на единичные квадратные дольки?

4. На занятиях в научно-исследовательской группе Центра «Стратегия» по физике преподаватель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирек массами 1, 2, 3, …, 16 г так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учащихся по очереди выходили из аудитории и забирали с собой по гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение, и перевешивала противоположная чаша весов. Какая гирька могла остаться на весах?

5. Найдите значение выражения $\dfrac{x^4+10x^2+25-y^4}{2xy-5-(x+y)^2}$ при $x = 2015$, $y = 2016$.

6. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB*=*BC*) на стороне *AB* взяли точки *D* и *F* (точка *D* ближе к *B*), а на стороне *BC* – точку *E* так, что отрезки *BD*=*DE*=*EF*=*FC*=*CA*. Найдите углы треугольника *ABC*.

9 класс.

1. Найдите последнюю цифру числа 1989^{1989}.

2. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 32°. Найдите угол между основанием этого треугольника и высотой треугольника, проведенной из вершины угла при основании.

3. Дана последовательность натуральных чисел 1,2,3,…, 2015. Разрешается зачёркивать любые два числа и записывать вместо них их разность. Докажите, что если в конце остался один нуль, то где-то допущена ошибка.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $KM \parallel AC$. Отрезок AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что $AK = AO$ и $KM = KC$. Докажите, что $AM = KB$.

5. Профессор выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что профессор где-то допустил ошибку.

6. Известно, что $a+b+c<0$ и что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Определить знак коэффициента c.

10-11 классы

1. Решите неравенство

$$2016x^{2016}+2000x^{2000}+1016x^{1016}+1000x^{1000}+16x^{16}\le 0.$$

2. При каких x последовательность ($2x-3$); $\sqrt{x+4}$; ($4-x$); … образует арифметическую прогрессию.

3. Основание треугольника равно *a*. Найдите длину отрезка прямой, параллельной основанию и делящей площадь треугольника в отношении 1 : 2.

4. Решите уравнение

$$x^2+4030x+2015^2+2\cdot|x^2-x-2015\cdot 2016|-3x^2+12096x-3\cdot 2016^2=0.$$

5. Какова вероятность того, что число случайным образом выбранное из четырёхзначных натуральных чисел, с различными цифрами, составленных с помощью цифр 1, 2, 3, 5, 7, 9, целочисленно разделится на 6?

6. Определите, при каких значениях параметра *a* уравнение

$$\left(\frac{1}{x^{2015}}+x^{2015}\right)\cdot(2a+5)=\left(x^{2016}+\frac{1}{x^{2016}}\right)\cdot(3a-2011)$$

имеет единственный корень.

7. На большем основании *CD* трапеции *ABCD* взята произвольная точка *N*. Через точку *N* проведены прямые *a* и *b* параллельные диагоналям трапеции. Прямая *a*, параллельная диагонали *AC*, пересекает отрезки *AD* и *BD* в точках *E* и *P* соответственно. Прямая *b*, параллельная диагонали *BD*, пересекает отрезки *BC* и *AC* в точках *F* и *Q* соответственно. Прямая *EF*, пересекает диагонали *BD* и *AC* в точках *M* и *L* соответственно. Докажите равенство треугольников *EPM* и *LQF*.

8. Определите, при каких значениях параметра *a* уравнение $12x^4+28x^3+7\sqrt{a}\cdot x^2+25x^2+8\sqrt{a}\cdot x+12x+a+3\sqrt{a}=0$ **имеет ровно два различных действительных решения.**

2015/2016 УЧЕБНЫЙ ГОД

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

8 класс

1. Докажите, что число 2111…1113 (2016 – значное число) составное.

2. В пирожковом автомате в Центре дополнительного образования продаются пирожки трёх видов: с курицей, с яблоками и с вишней. Пирожков с курицей больше 7, а с яблоками меньше 7. Вместе пирожков с курицей и с вишней в 2 раза больше, чем с яблоками, а с яблоками и с вишней ровно столько, сколько с курицей. Сколько пирожков каждого вида было в автомате?

3. Последовательность чисел (a_n) строится по такому закону: $a_{n+1} = f(a_n)$, где $f(x) = \frac{7-x}{x+1}$. Известно, что $a_{11} = 7$. Найдите произведение $a_9 \cdot a_{53}$.

4. *ABCD* – трапеция, в которой известны длины всех её сторон. *AB=5*, *BC=2*, *CD=12*, *AD=15*, где *BC* и *AD* – основания трапеции. Найдите площадь *ABCD*.

5. Недобросовестный охранник Азаров сторожил бочку с бензином. Решив заработать, он продал $\frac{1}{5}$ бочки и долил водой. Алчность охранника не знала предела, и он вновь продал $\frac{1}{5}$ бочки и долил водой. После того, как бензовозы забрали $\frac{3}{5}$ бочки для заправочной станции, увлекающийся математикой Азаров подсчитал, что в оставшейся части бензина только на 28 $м^3$ больше, чем воды. Найдите объем бочки.

6. Построить график функции $y = \frac{3|x^2-9|}{x(9-x^2)}$.

7. Решите уравнение $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

9 класс

1. На доске выписываются числа по следующему правилу: в первой строке число 1, во второй строке два числа 2 и 3, в третьей строке три числа 3, 4 и 5 и т. д. (в n-й строке стоят n последовательных натуральных чисел, начиная с n). Сколько раз на доске будет выписано число 2017?

2. Решить уравнение $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\ldots}}}} = 2016$.

3. В данном уравнении $4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$, найти m так, чтобы один действительный корень был квадратом другого.

4. Две окружности касаются внешним образом в точке A; BC – их общая внешняя касательная, пересекающая линию центров в точке K. Через K проведена прямая MN, перпендикулярная к BC. Прямые AB и AC пересекают MN в точках P и E. Доказать, что $KP=KE$.

5. В биномиальном разложении $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^{18}$ найти член разложения, не содержащий x.

6. Добрые организаторы инженерной олимпиады раздают её участникам конфеты, занумерованные натуральными числами. За минуту до окончания олимпиады они дают детям конфету №1. За полминуты до окончания они забирают её и дают конфеты №2 и №3. За четверть минуты они отдают конфеты №№4-7, а №2 и №3 забирают, за $\frac{1}{8}$ минуты – забирают конфеты №№4-7 и отдают конфеты №№8-15, и т.д. Сколько конфет будет у ребят по окончании олимпиады?

7. В клетчатом квадрате 6×6, вначале пустом, Иван закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

10-11 классы

1. Найдите наименьший натуральный корень уравнения $2\sin\frac{\pi x}{12}+4\cos\frac{\pi x}{6}=3$.

2. x = 1 является одним из корней уравнения $a|x-5|+2a=9$ (a – параметр), найдите другой корень этого уравнения.

3. Определите все точки графика функции $y=\frac{16+4x^2}{x^2}$, имеющие целочисленные координаты и лежащие выше прямой y = 5.

4. Точка пересечения диагоналей трапеции делит диагональ в отношении 2 : 3. Трапеция разделена диагоналями на четыре части, найдите отношение площади наименьшей из получившихся частей к площади всей трапеции.

5. Определите количество натуральных решений (x; y) уравнения
$x \cdot y + y = 2x + 2018$.

6. В квадрат $ABCD$ вписан круг. В каждом из углов ABC, BCD, CDA, DAB квадрата размещена система бесконечного числа кругов. Первый из кругов каждой системы касается круга, вписанного в квадрат, и сторон соответствующего угла, каждый следующий касается предыдущего и сторон соответствующего угла. Найдите отношение суммы площадей всех кругов, в том числе вписанного в квадрат, к площади квадрата.

7. Решите относительно переменной x, для всех значений параметра a, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2-6x+4-a\le 0; \\ x^2-6x+5+a<0. \end{cases}$$

8. В стране Липляндия 10 000 городов. Некоторые города соединены дорогами, причем вне городов дороги не пересекаются. Из каждого города в каждый можно добраться одним единственным способом, причем проехав при этом менее чем через 2016 городов. Какое минимальное число дорог между некоторыми парами городов нужно построить, чтобы из каждого города в каждый можно было гарантированно добраться, проехав при этом не более чем через 2014 городов? Вновь построенные дороги также вне городов не пересекаются.

ОТВЕТЫ
8 класс

1. **Решение.** Сумма цифр 2+2014+3=2019 делится на 3, значит, и само число делится нацело на 3.

2. **Ответ.** *6* пирожков с яблоками, *9* пирожков с курицей, 3 пирожка с вишней.

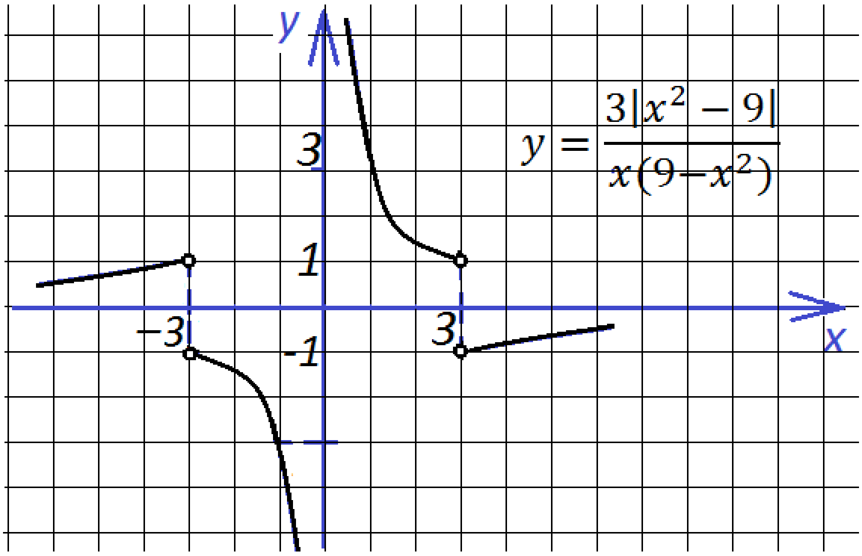
3. **Ответ.** $a_9 \cdot a_{53} = 7 \cdot 7 = 49$.

4. **Ответ.** $S_{ABCD} = 39\frac{1}{3}$.

5. **Ответ.** 250 $м^3$.

6. Построить график функции $y = \dfrac{3|x^2-9|}{x(9-x^2)}$.

Решение.



7. **Ответ.** 1, 2, 10.

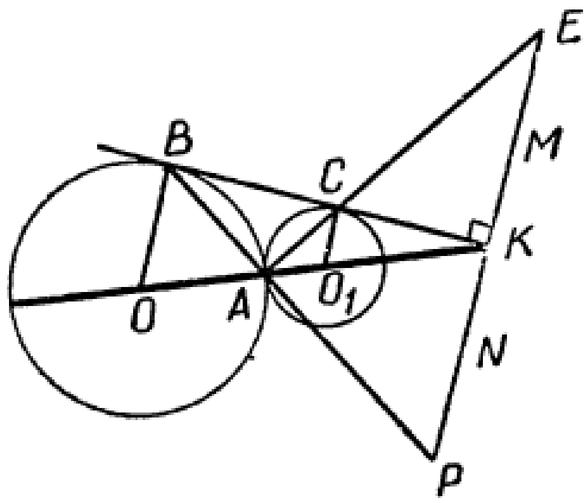
9 класс

1. **Ответ.** 1009.

2. **Ответ.** 2016.

3. **Ответ.** $m = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

4. **Решение.** $MN \parallel BO \parallel CO_1$, так как все три прямые перпендикулярны к BC. $\Delta AKE \sim \Delta ACO_1$, а так как $AO_1 = CO_1$, то $AK = KE$. $\Delta AKP \sim \Delta ABO$, а так как $AO = BO$, то $AK = KP$. Следовательно, $AK = KE$.



5. **Ответ.** 48620.

6. **Ответ.** Ни одной. Любая конфета забирается на следующем шаге.

7. **Решение.** Выложим квадрат из палочек, в том числе все перегородки между клеточками (длина счётной палочки равна стороне клетки). Вместо того, чтобы закрашивать клетку, будем закрашивать ограничивающие её палочки. Тогда число, записываемое в каждую клетку равно количеству ранее закрашенных палочек, ограничивающих эту клетку. Выкинем все палочки, составляющие периметр исходного квадрата. Тогда каждая оставшаяся палочка добавляет 1 в общую сумму (учитывается 1 раз в числе той из двух клеток, разделяемых этой палочкой, которая была закрашена позднее). Таким образом, сумма всех чисел есть количество внутренних перегородок между клетками. А их будет 6×5 вертикальных и 6×5 горизонтальных, т.е. всего 60.

10-11 классы

1. Ответ: 2.

2. Ответ: 9.

3. Ответ: (– 1; 20); (– 2; 8); (1; 20); (2; 8).

4. Ответ: 4 : 25.

5. Ответ: 35.

6. Ответ: $\frac{\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)}{8}$.

7. Ответ: 1 . Если *a* < – 0,5, то решений нет.

2 . Если *a* = – 0,5, то *x* = 1,5.

3 . Если $a \in (-0{,}5;\ \ 0)$**, то** $x \in \left[\frac{3-\sqrt{2a+1}}{2};\ \ \frac{3+\sqrt{2a+1}}{2}\right]$**.**

4 случай. Если $a \in [-0{,}5;\ \ 4)$**, то** $x \in \left(3-\sqrt{a-4};\ \ \frac{3+\sqrt{2a+1}}{2}\right]$**.**

5 случай. Если *a* = 4, то *x* = 3.

6 случай. Если *a* > 4, то решений нет.

8. Ответ: 8.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах.

Каждая задача оценивается по 7- балльной шкале.

Каждая работа должна быть оценена двумя членами жюри. В случае расхождения оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем Жюри или назначенным им ответственным лицом.

Результаты проверки всех работ жюри заносит в итоговую таблицу.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Победителями олимпиады являются участники, набравшие во втором (заключительном) этапе от 95 до 100 баллов. Они награждаются дипломами I степени.

Призёрами олимпиады являются участники, набравшие во втором (заключительном) этапе от 50 до 94 баллов.

Дипломами II степени награждаются участники, набравшие от 50 до 74 баллов.

Дипломами III степени награждаются участники, набравшие от 75 до 94 баллов.

2016/2017 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ВАРИАНТ 1

8 – 9 класс

1. На доске записано 2017 натуральных чисел. Доказать, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной.

2. В погребке дядюшки Ау стоит 20 одинаковое банок с вареньем. В 8 банках клубничное, в 7 – малиновое, в 5 – вишневое. Какое наибольшее число банок, которое можно в темноте вынести из погребка с уверенностью, что там осталось еще хотя бы четыре банки одного сорта варенья и три банки другого?

3. Ночью 7 граффитчиков по очереди разрисовывают белую стену каждый своей краской. Каждый закрасил k % (где k – натуральное число) стены, не видя, что нарисовали другие. Если какой-либо участок зарисован всеми семью цветами, то он становится белым. При каких k на стене гарантированно будет хотя бы один белый участок?

4. Из ЛГТУ в ВГУ и из ВГУ в ЛГТУ одновременно вышли два неутомимых участника инженерной олимпиады, которые встретились в Хлевном в полдень. Продолжая движение, они прибыли в свои пункты назначения соответственно в 4 часа и в 9 часов вечера. Определите, когда началось путешествие.

5. Доказать, что биссектрисы внешних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагональ которого равна сумме двух соседних сторон параллелограмма.

6. Найдите сумму всех отрицательных корней уравнения $x^4-5x^3-10x^2-7x+25=0$

РЕШЕНИЯ

1. На доске записано 2017 натуральных чисел. Доказать, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной.

Решение. Если все числа имеют одинаковый характер четности, то можно стереть любое из них. Если среди них есть и четные, и нечетные, то их количества обязательно имеют разный характер четности (2017 не может быть суммой чисел одинаковой четности). Если количество нечетных чисел нечетно, то можно стереть любое из них. Если же их количество четно, то стираем четное число, а такое хотя бы одно такое найдется.

2. В погребке дядюшки Ау стоит 20 одинаковое банок с вареньем. В 8 банках клубничное, в 7 – малиновое, в 5 – вишневое. Какое наибольшее число банок, которое можно в темноте вынести из погребка с уверенностью, что там осталось еще хотя бы четыре банки одного сорта варенья и три банки другого?

Решение. Скажем так: какое наименьшее число банок оставить в погребе, чтобы среди них оказались хотя бы четыре банки одного сорта варенья и три банки другого. Чтобы обеспечить 4 банки варенья одного сорта, надо оставить 10 банок. Но среди них могли оказаться все 8 банок клубничного варенья. Не клубничного варенья оставили точно не меньше двух банок. Тогда оставим еще 3 банки. Из 5 банок двух сортов, три обязательно будут одного сорта. Итак, 13 – минимальное число банок, которые можно оставить в погребе. Следовательно, 20-13=7 – максимальное число банок, которое можно из погреба вынести.

3. Ночью 7 граффитчиков по очереди разрисовывают белую стену каждый своей краской. Каждый закрасил k % (где k – натуральное число) стены, не видя, что нарисовали другие. Если какой-либо участок зарисован всеми семью цветами, то он становится белым. При каких k на стене гарантированно будет хотя бы один белый участок?

Решение. $100\% : 7 = 14\frac{2}{7}\%$, значит, при $k < 14\%$ точно будет хотя бы один белый участок, так как граффитчики не смогут закрасить стену целиком. Рассмотрим случай, когда каждый граффитчик раскрасил такую часть стены, что каждая точка покрыта краской ровно 6 разными цветами. Тогда граффитчики все вместе покрасили *600 %* стены, и если бы каждый из них покрасил чуть больше, то нашелся бы хотя бы один участок, покрашенный семью цветами, то есть белый.

$600\% : 7 = 85\frac{5}{7}\%$, а так как k – натуральное число, то $1 \le k \le 14, 86 \le k \le 100$.

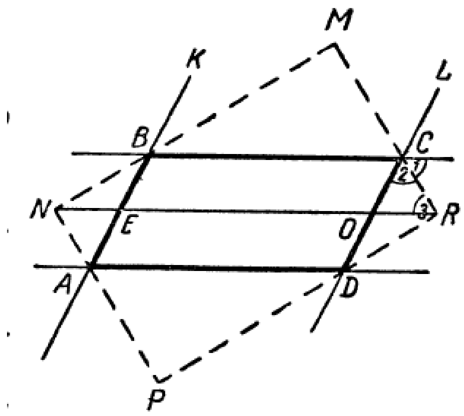
4. Из ЛГТУ в ВГУ и из ВГУ в ЛГТУ одновременно вышли два неутомимых участника инженерной олимпиады, которые встретились в Хлевном в полдень. Продолжая движение, они прибыли в свои пункты назначения соответственно в 4 часа и в 9 часов вечера. Определите, когда началось путешествие.

Решение. Пусть x – *км/ч* и y – *км/ч* – скорости участников олимпиады, t *ч* – время от начала путешествия до встречи. Путь первого участника до встречи равен *xt* км, а путь второго участника олимпиады до встречи равен *yt* км. После встречи первый прошел *yt/x=4* и *xt/y=9*.

Перемножив эти уравнения, находим, *t = 6*. Встреча в Хлевном состоялась в полдень, поэтому путешествие началось в 6 утра.

5. Доказать, что биссектрисы внешних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагональ которого равна сумме двух соседних сторон параллелограмма.

Решение.



$\angle KBC + \angle LCB = 180$ (односторонние углы при $KB \parallel CL$ и секущей BC.

$\frac{1}{2}\angle KBC + \frac{1}{2}\angle LCB = 90$, т.е. $\angle MCB + \angle MBC = 90$, значит, в ΔBMC $\angle M = 90$.

Аналогично можем показать, что $\angle N = \angle P = \angle R = 90$, т.е. $NMRP$ – прямоугольник. $\angle 1 = \angle 2$ (CR – биссектриса внешнего угла параллелограмма). $\angle 1 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие углы). Значит $\angle 2 = \angle 3$, т.е. $OR = OC = OD = \frac{1}{2}CD$. Аналогично покажем, что $NE = EB = AE = \frac{1}{2}AB$.

Отсюда $NR = NE + EO + OR = BE + BC + OC = BC + AB$.

6. Найдите сумму всех отрицательных корней уравнения

$$x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 7x + 25 = 0$$
$$(x^2 - 5)^2 - x(5x^2 + 7) = 0$$

При $x < 0$ имеем $(x^2 - 5)^2 \geq 0, -5x^3 > 0, -7x > 0$, то есть $(x^2 - 5)^2 - x(5x^2 + 7) > 0$. Поэтому отрицательных корней уравнение не имеет.

10-11 классы

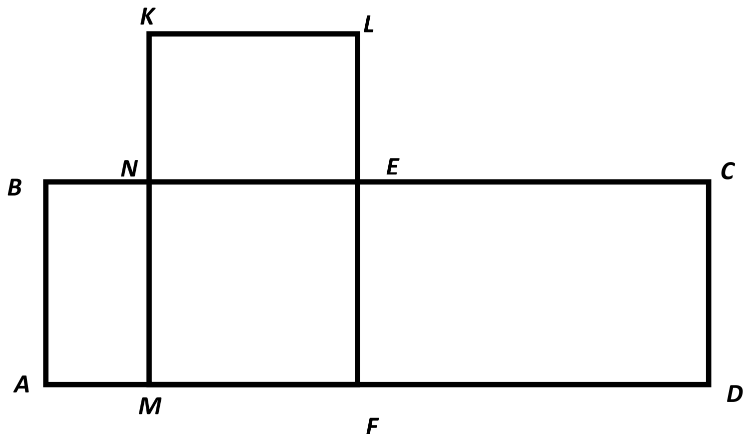
1. Решите неравенство

$$\sqrt{x-2016} + \sqrt{2x-2017} + \sqrt{3x-2018} \leq \sqrt{x-2017} + \sqrt{2x-2018} + \sqrt{3x-2019}.$$

2. Определите количество точек пересечения графиков функций $y = |x + 2|$ и $y = \dfrac{5}{|x+1|}$.

3. В пенале лежат четыре шариковых ручки: черная, красная, синяя и зеленая, а также пять карандашей: черный, красный, синий, жёлтый и зеленый. Школьник случайным образом достаёт из пенала одну ручку и один карандаш. Определите вероятность того, что карандаша и ручка будут одинаковых цветов.

4. Посмотрите на рисунок и определите, у какого многоугольника площадь больше, у *MBKLCF* или у *AKLD*.



5. Определите сумму всех различных действительных корней уравнения

$$(x+1)(x+2016) = \frac{2016}{(x+2017)(x+2)}.$$

6. Абитуриент затратил на выполнение контрольной работы 3 часа. На решение каждой следующей задачи абитуриент тратил в одно и то же число раз больше времени, чем на решение предыдущей. Определите время выполнения каждой задачи, если известно, что на решение третьей задачи было затрачено на 36 минут больше времени, чем на решение первой. Контрольная работа содержала 4 задачи.

7. В треугольнике *ABC* вписанная окружность касается стороны *AB* в точке *N*. Определите величину наибольшего угла треугольника *ABC*, если его площадь равна $AN \cdot BN$.

8. В регионе распределяют квоты мест по естественнонаучным направлениям подготовки для направления детей в образовательный центр «Сириус». Всего семь направлений подготовки: математика, информатика, физика, химия, астрономия, география, биология. Суммарное число выделенных на все направления мест равно 380, количество мест на каждое из направлений не должно превышать 60 мест. Сколько существует различных вариантов распределения квот по направлениям?

РЕШЕНИЯ

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x-2016}+\sqrt{2x-2017}+\sqrt{3x-2018}\le\sqrt{x-2017}+\sqrt{2x-2018}+\sqrt{3x-2019}\,.$$

Решение. Каждое из слагаемых левой части больше соответствующего слагаемого правой части. Следовательно, левая часть неравенства больше правой при любых допустимых значениях *x*.

Ответ: корней нет.

2. Определите количество точек пересечения графиков функций *y* = |*x* + 2| и $y=\frac{5}{|x+1|}$.

Решение. Составим уравнение

$$\frac{2016}{|x+1|}=|x+2|\,.$$

Преобразуем

$$|x^2+3x+2|=2016\,;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x+2=-2016; \\ x^2+3x+2=2016; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x+2018=0; \\ x^2+3x-2014=0. \end{array}\right.$$

В первом из полученных квадратных уравнений, дискриминант положителен, а во втором отрицателен. Следовательно, совокупность имеет два корня. Каждому значению аргумента соответствует в точности одно значение функции, поэтому точек пересечения две.

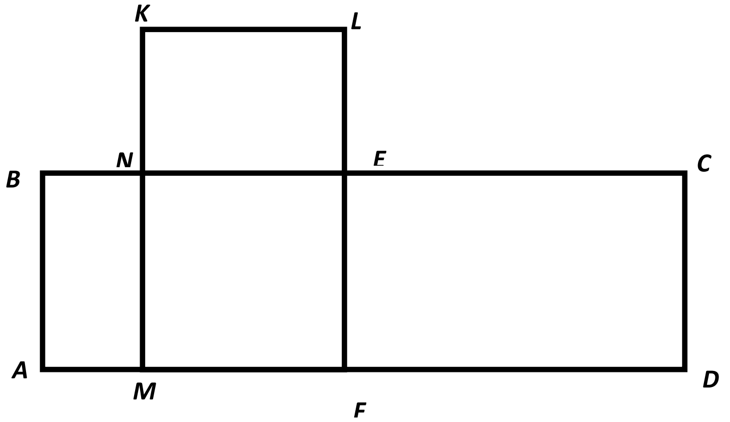
Ответ: 2.

3. В пенале лежат четыре шариковых ручки: черная, красная, синяя и зеленая, а также пять карандашей: черный, красный, синий, жёлтый и зеленый. Школьник случайным образом достаёт из пенала одну ручку и один карандаш. Определите вероятность того, что карандаша и ручка будут одинаковых цветов.

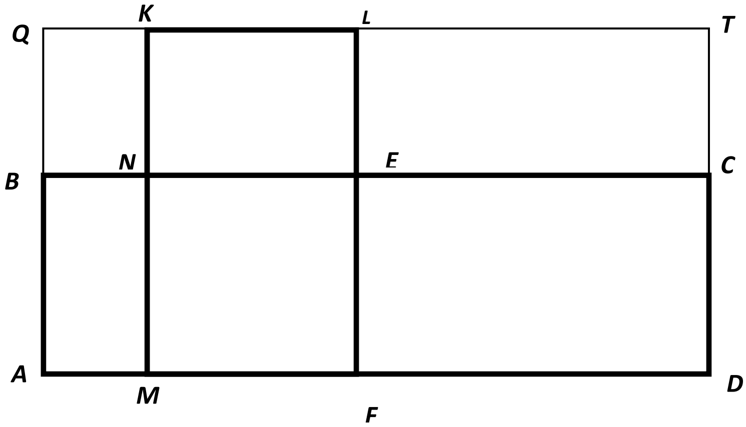
Решение. Различных наборов карандашей и ручек: 4 · 5 = 20. Вариантов, когда карандаша и ручка будут одинаковых цветов четыре. По классическому определению вероятности, искомая вероятность: $p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

4. Посмотрите на рисунок и определите, у какого многоугольника площадь больше, у *MBKLCF* или у *AKLD*.



Решение. 1. Дополним имеющуюся фигуру до прямоугольника *AQTD*.



2. Диагональ прямоугольника делит его площадь пополам. Поэтому площадь многоугольника *MBKLCF* равна сумме площадей прямоугольника *MKLF*, и половинок площадей прямоугольников *ABNM*, *BQKN*, *ELTC* и *FECD*. Площадь любой фигуры равна сумме площадей её частей, следовательно, площадь многоугольника *MBKLCF* равна сумме площадей прямоугольника *MKLF*, и половинок площадей прямоугольников *AQKM* и *LTDF*.

3. Площадь многоугольника *AKLD* равна сумме площадей прямоугольника *MKLF*, и половинок площадей прямоугольников *AQKM* и *LTDF*.

Ответ: площади многоугольников равны.

5. Определите сумму всех различных действительных корней уравнения

$$(x+1)(x+2016) = \frac{2016}{(x+2017)(x+2)}.$$

Решение. 1. $x \neq -2$; $x \neq -2017$.

2. Преобразуем уравнение:

$$\big((x+1)(x+2017)\big)\big((x+2)(x+2016)\big) = 2016;$$

$(x^2 + 2018x + 2017)(x^2 + 2018x + 4032) = 2016$.

3. Выполним замену переменной: $x^2 + 2018x + 2017 = t$, получим уравнение

$t^2 + 2015t – 2016 = 0$.

Корни уравнения: $t_1 = 1$; $t_2 = – 2016$.

4. Возврат к исходной переменной:

$x^2 + 2018x + 2016 = 0$; $x^2 + 2018x + 4033 = 0$.

Дискриминанты полученных квадратных уравнений положительны. По теореме Виета, суммы корней каждого из уравнений равны – 2018.

Ответ: – 4036.

6. Абитуриент затратил на выполнение контрольной работы 3 часа. На решение каждой следующей задачи абитуриент тратил в одно и то же число раз больше времени, чем на решение предыдущей. Определите время выполнения каждой задачи, если известно, что на решение третьей задачи было затрачено на 36 минут больше времени, чем на решение первой. Контрольная работа содержала 4 задачи.

Решение. 1. (b_n) – геометрическая прогрессия, $S_4 = 180$, $b_3 – b_1 = 36$. Найти b_1; b_2; b_3; b_4.

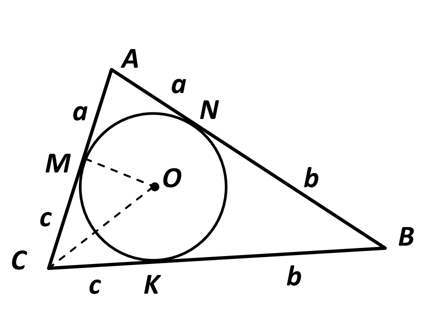
2. Составим систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 180; \\ b_1 q^2 - b_1 = 36. \end{cases}$

Система имеет два набора решений: $q = 2$, $b_1 = 12$ или $q = 3$, $b_1 = 4{,}5$. Из полученных значений получаем искомые члены прогрессии.

Ответ: 12 мин; 24 мин; 48 мин; 96 мин или

4,5 мин; 13,5 мин; 40,5 мин; 121,5 мин.

7. В треугольнике *ABC* вписанная окружность касается стороны *AB* в точке *N*. Определите величину наибольшего угла треугольника *ABC*, если его площадь равна *AN · BN*.



Решение. 1. Введем обозначения: $AM = AN = a$ (отрезки касательных, проведенные из одной точки к окружности, равны), $BK = BN = b$, $CM = CK = c$, r – радиус окружности вписанной в треугольник ABC, S – площадь треугольника ABC.

2. Тогда $S = ab$, $S = pr = (a+b+c)r$, $a+b+c = \dfrac{S}{r}$.

$$S = \frac{1}{2}(a+c)(b+c)\cdot\sin C,$$

$$2S = (ab+bc+ac+c^2)\cdot\sin C = \big(S + c(a+b+c)\big)\cdot\sin C = \left(S + \frac{cS}{r}\right)\cdot\sin C,$$

$$2 = \frac{r+c}{r}\cdot\sin C,\ \sin C = \frac{2r}{r+c} \quad (*).$$

3. Из треугольника CMO: $\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+c^2}}$, $\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}$,

$$\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{2rc}{r^2+c^2} \qquad (**).$$

4. Приравнивая (*) и (**), получаем, что $c = r$, $\angle\dfrac{C}{2} = 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Угол в 90° – это больший угол треугольника.

Ответ: 90°.

8. В регионе распределяют квоты мест по естественнонаучным направлениям подготовки для направления детей в образовательный центр «Сириус». Всего семь направлений подготовки: математика, информатика, физика, химия, астрономия, география, биология. Суммарное число выделенных на все направления мест равно 380, количество мест на каждое из направлений не должно превышать 60 мест. Сколько существует различных вариантов распределения квот по направлениям?

Решение. 1. Условно распределим на каждое направление по 60 мест. В итоге будет нехватка 7 · 60 – 380 = 40 мест.

2. Используя метод “перегородок и шаров” распределим 40 “избыточных” мест по 7 группам подготовки всеми различными способами. Для этого к 40 местам добавим 6 перегородок, которые можно расставить на одну из 40 + 7 – 1 = 46 позиций. Общее количество вариантов C_{46}^{6}.

Ответ: C_{46}^{6}**.**

ВАРИАНТ 2

8-9 класс

1. Дед Мороз старательно упаковывал подарки в ящики; всего подарков у него было 375. Снегурочка заметила, что ни в один из ящиков Дед Мороз не положил более двадцати двух подарков и не один из ящиков не оказался пустым. Докажите, что найдутся три ящика, в которых подарков поровну.

2. Построить график функции $y = |x-1| \cdot |x+2|$.

3. Докажите, что число $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 + 1$ является квадратом некоторого целого числа.

4. Гарри Поттер пришел в Выручай-комнату, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит 200 кг, полный алмазов – 40 кг, а пустой ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 галеонов, а 1 кг алмазов – 60. Сколько денег может выручить Гарри Поттер за сокровища, если он может унести не более 100 кг?

5. В правильном треугольнике *ABC* со стороной, равной 3, через точку *A* и середину высоты *BD* проведена прямая до пересечения с *BC* в точке *F*. Найти длину *AF*.

6. Проверьте равенство $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = 9$.

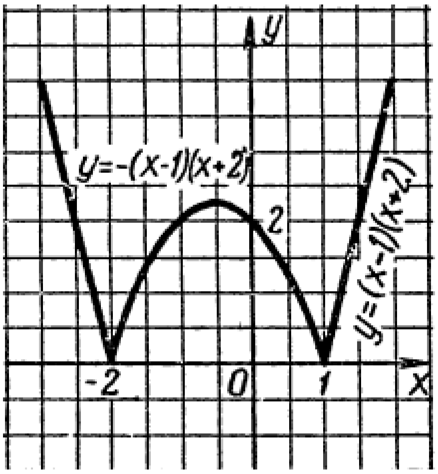
РЕШЕНИЕ

1. Дед Мороз старательно упаковывал подарки в ящики; всего подарков у него было 375. Снегурочка заметила, что ни в один из ящиков Дед Мороз не положил более двадцати двух подарков и не один из ящиков не оказался пустым. Докажите, что найдутся три ящика, в которых подарков поровну.

Решение. Используем принцип Дирихле. Если во всех ящиках разное количество подарков, то уместим только 253 подарка. $(1+22)\cdot 11 = 253$. Станем упаковывать ящики наиболее плотно, помещая в двух ящиках одинаковое количество подарков, при этом уместим только 374 подарка. Последний подарок помещаем в любой из ящиков, кроме тех, в которых уже лежат по 22 подарка. Таким образом, найдутся три ящика, в которых подарков поровну.

2. Построить график функции $y = |x-1| \cdot |x+2|$.

Решение.



3. Докажите, что число $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 + 1$ является квадратом некоторого целого числа.

Решение. Можно заметить, что данное число есть значение выражения $x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + 1$ при $x = 2015$. Имеем

$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) + 1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2) + 1 = (x^2+3x)^2 + 2(x+3) + 1 = (x^2+3x+1)^2$ квадрат натурального числа при любом натуральном x, в том числе при $x = 2015$.

4. Гарри Поттер пришел в Выручай-комнату, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит 200 кг, полный алмазов – 40 кг, а пустой ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 галеонов, а 1 кг алмазов – 60. Сколько денег может выручить Гарри Поттер за сокровища, если он может унести не более 100 кг?

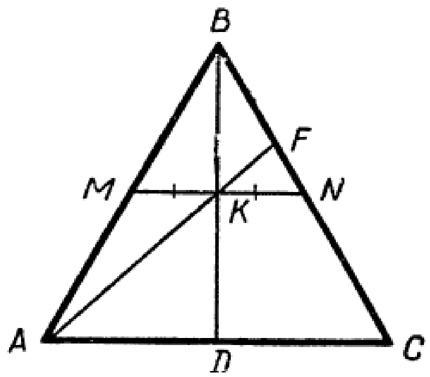
Решение. Предположим, что Гарри Поттер унести из комнаты x кг золота и y кг алмазов. В этом случае он сможет получить $20x+60y$ галеонов. Поскольку Гарри может поднять не более 100 кг, то $x + y \le 100$.

Кроме того, 1 кг золота занимает $\frac{1}{200}$ часть сундука, а 1 кг алмазов занимает $\frac{1}{40}$ часть сундука. Значит, взятые Гарри сокровища займут $\frac{x}{200} + \frac{y}{40}$ часть сундука. В распоряжении Гарри только один сундук, поэтому получаем ограничение: $\frac{x}{200} + \frac{y}{40} \le 1$ или $x + 5y \le 200$. Таким образом, имеем систему

$\begin{cases} x + y \le 100, \\ x + 5y \le 200 \end{cases}$. Получим, $20x + 60y \le 3000$, следовательно, Гарри сможет получить за сокровища не более 3000 галеонов. Осталось показать, что Гарри сможет унести сокровища на 3000 галеонов. Для этого необходимо и достаточно, чтобы система неравенств перешла в систему уравнений. Решая систему уравнений, получим *x=75, y=25*.

5. В правильном треугольнике *ABC* со стороной, равной 3, через точку *A* и середину высоты *BD* проведена прямая до пересечения с *BC* в точке *F*. Найти длину *AF*.

Решение.



$\Delta KFN \sim \Delta AFC$, $\dfrac{FN}{FC} = \dfrac{KN}{AC}$; $\dfrac{FN}{FN+NC} = \dfrac{KN}{AC}$; $\dfrac{FN}{FN+1{,}5} = \dfrac{0{,}75}{3}$; $FN = 0{,}5$.

$AN = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. $AF = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{27}{4}} = \sqrt{7}$.

6. Проверьте равенство $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = 9$.

Решение. Преобразуем левую часть равенства, домножив числитель и знаменатель каждой дроби на число, сопряженное знаменателю. В итоге получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + ... + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} = 10 - 1 = 9.$$

10-11 классы

1. Решите уравнение: $5\sin^8(2016x) - 3\cos(2017x) + 4 = 0$.

2. В арифметической прогрессии, состоящей из четырёх чисел, разность большего числа и меньшего равна 6, а произведение всех четырёх чисел равно 84. Найдите все четыре члена прогрессии.

3. Определите наименьшее и наибольшее значения выражения $\dfrac{|a+b|-|b-a|}{2}$, если a и b различные шестизначные натуральные числа.

4. Решите в целых числах систему неравенств

$$\begin{cases} x\left(y-\dfrac{2}{3}\right)>0; \\ \left(y-\dfrac{2}{3}\right)\left(z-\dfrac{4}{3}\right)<0; \\ \left(z-\dfrac{4}{3}\right)(x-2)>0; \\ \left(y-\dfrac{1}{3}\right)\left(z-\dfrac{1}{3}\right)>0. \end{cases}$$

5. На сторонах *AB, BC* и *AC* треугольника *ABC* отмечены соответственно точки *M, N* и *K* так, что треугольник *AMK* подобен треугольникам *NBM* и *NKC*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *MNK*, если *MK* = 12 см, а угол *BAC* равен 45°.

6. Каково должно быть расстояние между центрами двух окружностей радиусов 2016 и 2017, для того чтобы одна из общих касательных к окружностям была вдвое больше другой?

7. Из каждого города Тридевятого царства есть сообщение авиалинией с 2016 другими городами, и из каждого города можно долететь до любого другого (возможно с пересадками). Можно ли утверждать, что если закрыть любую авиалинию, всё равно из любого города можно будет долететь до любого другого?

8. В системе координат *Oxyz*, плоскости вида $x = S$, $y = S$, $z = S$ (*S* принимает все возможные целочисленные значения), разбивают пространство на кубики $1 * 1 * 1$. Каждый кубик раскрашен в 1 из 2016 цветов (все цвета встречаются). Два цвета называются соседними, если есть два соседних по грани кубика этих цветов. Какое минимальное значение может принимать количество пар соседних цветов (цвет может соседствовать сам себе)?

РЕШЕНИЕ

1. Решите уравнение: $5\sin^8(2016x)-3\cos(2017x)+4=0$**.**

Решение. $0\le 5\sin^8(2016x)\le 5$, $-3\le -3\cos(2017x)\le 3$, следовательно, $1\le 5\sin^8(2016x)-3\cos(2017x)\le 12$ и уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

2. В арифметической прогрессии, состоящей из четырёх чисел, разность большего числа и меньшего равна 6, а произведение всех четырёх чисел равно 84. Найдите все четыре члена прогрессии.

Решение. 1. Без потери общности будем считать, что прогрессия возрастающая. В арифметической прогрессии, состоящей из четырёх чисел, разность большего числа и меньшего равна утроенной разности прогрессии, следовательно, разность прогрессии равна 2. Обозначим меньший член прогрессии через x и получим уравнение $x\cdot(x + 1)(x + 2)(x + 6) = 84$.

2. Уравнение решим, выполнив замену $x^2 + 6x = t$.

Ответ: $-3-\sqrt{15}$, $-1-\sqrt{15}$, $1-\sqrt{15}$, $3-\sqrt{15}$.

3. Определите наименьшее и наибольшее значения выражения $\frac{|a+b|-|b-a|}{2}$, если *a* и *b* различные шестизначные натуральные числа.

Решение. 1. Для положительных a и b наименьшее значение выражения $\frac{|a+b|-|b-a|}{2}$ равно $\min(a; b)$. Наименьшее шестизначное натуральное число 100 000, следовательно, искомое наименьшее значение равно 100 000 (например, при a = 100 000, а b = 100 001.

2. Если a и b различные шестизначные натуральные числа, то наибольшее значение выражения $|a + b|$ достигается при наибольших значениях a и b, т.е. оно равно 999 999 + 999 998. Наименьшее значение $|b – a|$, при различных натуральных a и b, равно 1. При наибольшем уменьшаемом и наименьшем вычитаемом разность будет наибольшей. Искомое наибольшее значение равно $\frac{999999+999998-1}{2}=999998$

Ответ: 100 000; 999 998.

4. Решите в целых числах систему неравенств $\begin{cases} x\left(y-\frac{2}{3}\right)>0; \\ \left(y-\frac{2}{3}\right)\left(z-\frac{4}{3}\right)<0; \\ \left(z-\frac{4}{3}\right)(x-2)>0; \\ \left(y-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)>0. \end{cases}$

Решение. 1. При $x = 0$ первое неравенство не имеет решений.

2. Если $x < 0$, то (из первого неравенства) $y < \frac{2}{3}$, $z > \frac{4}{3}$ (из второго неравенства), $x > 2$ (из третьего неравенства). Следовательно, в рассматриваемом случае, система решений не имеет.

3. Если $x > 0$, то (из первого неравенства) $y > \frac{2}{3}$, $z < \frac{4}{3}$ (из второго неравенства), $x < 2$ (из третьего неравенства). Единственное целое значение x, удовлетворяющее указанным условиям, равно 1.

4. Если $x = 1$, то система принимает вид $\begin{cases} y > \frac{2}{3}; \\ z < \frac{4}{3}; \\ z > \frac{1}{3}. \end{cases}$

Следовательно, $z = 1$, y – любое натуральное число.

Ответ: $x = 1$, y – любое натуральное число, $z = 1$.

5. На сторонах *AB, BC* и *AC* треугольника *ABC* отмечены соответственно точки *M, N* и *K* так, что треугольник *AMK* подобен треугольникам *NBM* и *NKC.* Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *MNK*, если *MK* = 12 см, а угол *BAC* равен 45°.

Решение. 1. Из подобия треугольников

$$\angle MNB = \angle CNK = 45^\circ, \angle MNK = 180^\circ - \angle CNK - \angle MNB = 90^\circ.$$

2. В прямоугольном треугольнике MNK радиус описанной окружности равен половине гипотенузы MK, следовательно, искомый радиус равен 6 см.

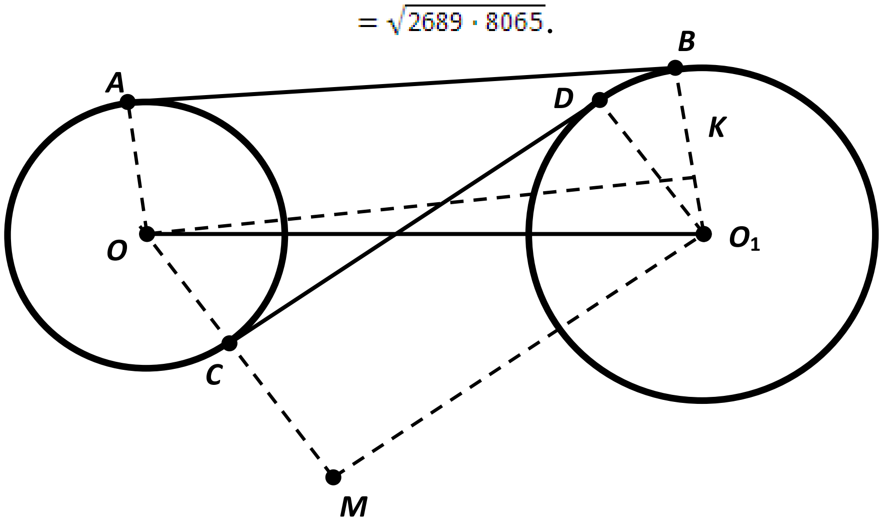
Ответ: 6 см.

6. Каково должно быть расстояние между центрами двух окружностей радиусов 2016 и 2017, для того чтобы одна из общих касательных к окружностям была вдвое больше другой?

Решение. Пусть $C \in OM$, $OC = OA = r$, $O_1B = R$, $OK \parallel AB$, $O_1D \parallel OM$, $KO_1 = R - r$, $OM = R + r$, $OO_1 = a$. Условие задачи $AB = 2CD$ можно записать, как

$$\sqrt{a^2-(R-r)^2}=2\sqrt{a^2-(R+r)^2},\ a=\sqrt{\left(R+\frac{r}{3}\right)(R+3r)}=\sqrt{\left(R+\frac{r}{3}\right)(R+3r)}=$$

$$=\sqrt{2689\cdot 8065}.$$



Ответ: $\sqrt{2689\cdot 8065}$.

7. Из каждого города Тридевятого царства есть сообщение авиалинией с 2016 другими городами, и из каждого города можно долететь до любого другого (возможно с пересадками). Можно ли утверждать, что если закрыть любую авиалинию, всё равно из любого города можно будет долететь до любого другого?

Решение. Докажем от противного, что это так.

Пусть после отмены некоторого рейса граф из городов и авиалиний разбивается на 2 несвязные части. Тогда в каждой из них все вершины имеют степень 2016, кроме одной имеющей степень 2015. Сумма степеней нечётна, чего в графе не может быть (поскольку каждое ребро прибавляет к суммарной степени 2).

Ответ: да.

8. В системе координат *Oxyz*, плоскости вида $x = S, y = S, z = S$ (*S* принимает все возможные целочисленные значения), разбивают пространство на кубики $1 * 1 * 1$. Каждый кубик раскрашен в 1 из 2016 цветов (все цвета встречаются). Два цвета называются соседними, если есть два соседних по грани кубика этих цветов. Какое минимальное значение может принимать количество пар соседних цветов (цвет может соседствовать сам себе)?

Решение. 1. Покажем, что это число не может быть меньше 2015.

Рассмотрим первый цвет. Про остальные цвета на время забудем. В рассматриваемом случае соседних цветов будет 0 (кубики первого цвета нигде не будут граничить) или 1 (как минимум два кубика первого цвета граничат). Будем добавлять новый цвет некоторого кубика соседствующего с уже выбранными кубиками. Количество соседних цветов при этом будет увеличиваться как минимум на 1. Будем продолжать это действие, пока не добавим все цвета. Соседних цветов при этом окажется не менее 2015.

2. Теперь покажем пример, когда соседних цветов будет ровно 2015.

Вначале раскрасим все кубики в черный и белый цвета так, чтобы соседние кубики имели различный цвет (шахматная раскраска). Затем перекрасим все белые кубики в первый цвет, а черные в цвета от 2 до 2016. Получим раскраску, где кубики цветов со 2 по 2016 соседствуют лишь с кубиками цвета 1, а кубики цвета 1 не соседствуют друг с другом. Эта раскраска искомая.

Ответ: 2015.

ВАРИАНТ 3

8-9 классы

1. Можно ли увезти 50 камней весом 370, 372, 374, …, 468 кг на семи трехтонках.

2. Построить график функции $y=|x-1|\cdot(|x|-1)$.

3. Докажите, что число $1994^2+1994^2\cdot1995^2+1995^2$ является квадратом целого числа.

4. Четыре токаря: Василий, Николай, Петр и Сергей – должны были за два дня изготовить соответственно 42, 18, 24 и 37 деталей. Двое из них выполнили задание в первый же день. Третий, проболев первый день, все свое задание выполнил во второй день, а четвертый – оба дня проболел, но общее задание двух дней было выполнено полностью. Кто из них болел, если известно, что токари, работавшие в первый день, во второй день сделали столько же, сколько и в первый?

5. В треугольнике *ABC* точка *M* – середина *BC*. Биссектриса угла *AMB* пересекает сторону *AB* в точке *E*, а биссектриса угла *AMC* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Найти ME^2+MD^2, если *MC=8*, а *DC:AD=3:5.*

6. Решите уравнение в натуральных числах: $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\dfrac{30}{7}$.

РЕШЕНИЕ

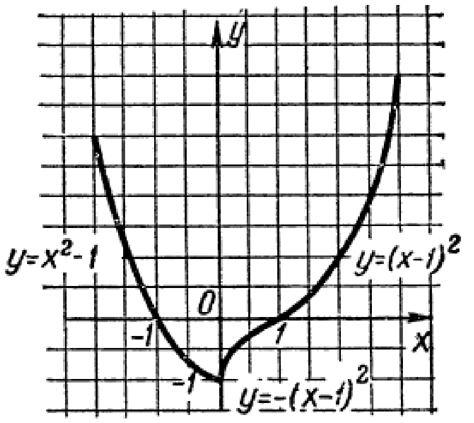
1. Можно ли увезти 50 камней весом 370, 372, 374, …, 468 кг на семи трехтонках.

Решение. Предположим, что нам удастся увезти камни на 7 трехтонках, тогда хотя бы на одну придется погрузить не менее 8 камней $(7 \cdot 7 = 49 < 50)$. Но даже 8 самых легких камней нельзя погрузить на машину, так как

$370 + 372 + ... + 384 = 3016 < 3000$. Противоречие. Значит, не удастся перевезти указанные камни на 7 трехтонках.

2. Построить график функции $y = |x-1| \cdot (|x|-1)$.

Решение.



3. Докажите, что число $1994^2 + 1994^2 \cdot 1995^2 + 1995^2$ является квадратом целого числа.

Решение. Рассмотрим выражение:

$$n^2 + n^2(n^2+1)^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^2(n+1) + (n+1)^2 = (n^2+n+1)^2.$$

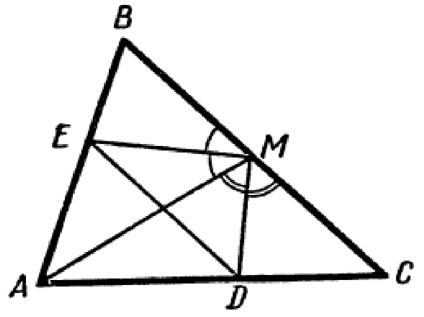
Данное число есть значение этого выражения при $n=1994$. Значит $1994^2 + 1994^2 \cdot 1995^2 + 1995^2$ квадрат целого числа.

4. Четыре токаря: Василий, Николай, Петр и Сергей – должны были за два дня изготовить соответственно 42, 18, 24 и 37 деталей. Двое из них выполнили задание в первый же день. Третий, проболев первый день, все свое задание выполнил во второй день, а четвертый – оба дня проболел, но общее задание двух дней было выполнено полностью. Кто из них болел, если известно, что токари, работавшие в первый день, во второй день сделали столько же, сколько и в первый?

Решение. По условию задачи два токаря во второй день выполнили задание того токаря, который болел два дня. Среди данных чисел только одно равно сумме двух других: *42=18+24*. Поэтому два дня болел Василий, а один день Сергей.

5. В треугольнике ABC точка M – середина BC. Биссектриса угла AMB пересекает сторону AB в точке E, а биссектриса угла AMC пересекает сторону AC в точке D. Найти ME^2+MD^2, если $MC=8$, а $DC:AD=3:5$.

Решение.



MD – биссектриса $\angle AMC$, значит $CD:AD=MC:AM$; ME – биссектриса $\angle AMB$, значит, $BE:AE=BM:AM$. А так как $MC=BM$, то $CD:AD=BE:AE$, т.е. $\Delta ADE\sim\Delta ABC$. Из этого следует: $BC:ED=AC:AD=8:5$; $BC=16$, значит, $ED=10$. Рассмотрим ΔEMD. Он прямоугольный, значит по т.Пифагора $ME^2+MD^2=100$.

6. Решите уравнение в натуральных числах: $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\dfrac{30}{7}$.

Решение. Представим $\dfrac{30}{7}=4+\dfrac{2}{7}$. Так как x, y, z – натуральные числа и $y+\dfrac{1}{z}>1$, то $x=4$ и $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{z}}=\dfrac{2}{7}$, тогда $y+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2}$. Откуда $y=3$, $z=2$.

10-11 классы

1. Решите уравнение: $\cos^6(2016x)+3=\sin(2017x)$.

2. В течение первой недели декабря температура уменьшалась каждый день на одинаковое число градусов. Температура всю неделю была отрицательной и измерялась целыми числами, а в последний день недели (в воскресенье) температура была 14 градусов ниже нуля. Определите возможное значение температуры в первый декабрьский понедельник.

3. Найдите все положительные решения неравенства $\dfrac{|x+2016|-|x-2016|}{2}\geq 2016$.

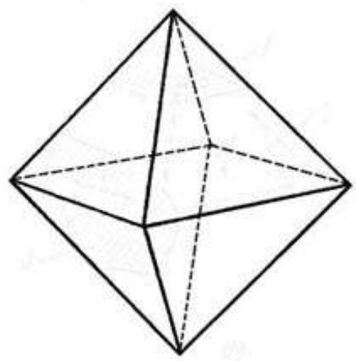
4. Определите наименьшее значение суммы целых чисел x и y, если $(x;\ y)$ является решением системы неравенств $\begin{cases} x\left(y-\dfrac{2017}{3}\right)>0; \\ \left(y-\dfrac{2015}{3}\right)\left(x-\dfrac{2016}{2015}\right)<0. \end{cases}$

5. Имеются 1999 металлических стержня длинами, соответственно: 1; 2; 3; 4; …; 1999 см. Можно ли из этих стержней, не сгибая их и не разделяя на части, спаять: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед.

6. Площадь остроугольного треугольника ABC равна S. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, AC и BC в точках M, N и K соответственно. Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Отрезки BO и MK пересекаются в точке E, а отрезки CO и NK пересекаются в точке F. Точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на отрезок EF. Найдите площадь треугольника EOF, если высота треугольника ABC, проведенная из вершины A, в 3 раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности и в 12 раз больше OQ.

7. Равносторонний треугольник перемещают, отражая от одной из его сторон (выбор стороны произволен на каждом шаге). После n отражений он вернулся на прежнее место. Может ли n быть равно 2017? А если бы перемещался правильный шестиугольник?

8. Имеется 8 различных красок. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить ими октаэдр в 8 цветов? В каждом способе раскраски каждая краска используется ровно один раз. Два способа раскраски геометрически одинаковы, если они могут быть переведены друг в друга перемещением октаэдра.



РЕШЕНИЕ

1. Решите уравнение: $\cos^6(2016x)+3=\sin(2017x)$**.**

Решение. $3\le\cos^6(2016x)+3\le 4$**,** $-1\le\sin(2017x)\le 1$, следовательно, уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

2. В течение первой недели декабря температура уменьшалась каждый день на одинаковое число градусов. Температура всю неделю была отрицательной и измерялась целыми числами, а в последний день недели (в воскресенье) температура была 14 градусов ниже нуля. Определите возможное значение температуры в первый декабрьский понедельник.

Решение. В рассматриваемой арифметической прогрессии $a_7 = a_1 + 6d$, где d – разность прогрессии. Следовательно, $\begin{cases} a_1 + 6d = -14; \\ a_1 < 0; \\ d \in Z; \\ a_1 \in Z. \end{cases}$

Рассмотрев два варианта $d = -1$ и $d = -2$, получим возможные ответы.

Ответ: – 8 или – 2.

3. Найдите все положительные решения неравенства $\frac{|x+2016| - |x-2016|}{2} \geq 2016$**.**

Решение. $|x + 2016| = x + 2016$ для любого положительного x. Следовательно,

$$\frac{x + 2016 - |x-2016|}{2} \geq 2016, \quad x - 2016 \geq |x-2016|.$$

Полученное неравенство верно для любого $x \geq 2016$.

Ответ: $x \geq 2016$.

4. Определите наименьшее значение суммы целых чисел *x* и *y*, если (*x*; *y*) является решением системы неравенств $\begin{cases} x\left(y - \frac{2017}{3}\right) > 0; \\ \left(y - \frac{2015}{3}\right)\left(x - \frac{2016}{2015}\right) < 0. \end{cases}$

Решение. 1. При $x = 0$ первое неравенство не имеет решений.

2. Если $x < 0$, то (из первого неравенства) $y < \frac{2017}{3}$, $y > \frac{2015}{3}$ (из второго неравенства). Следовательно, в рассматриваемом случае, целочисленных решений система не имеет.

3. Если $x > 0$, то (из первого неравенства) $y > \frac{2017}{3}$, $x < \frac{2016}{2015}$ (из второго неравенства). Единственное целое значение x, удовлетворяющее указанным условиям, равно 1.

4. Если $x = 1$, а $y > \frac{2017}{3}$, то наименьшее значение суммы целых чисел x и y равно $1 + 673 = 674$. **Ответ: 674.**

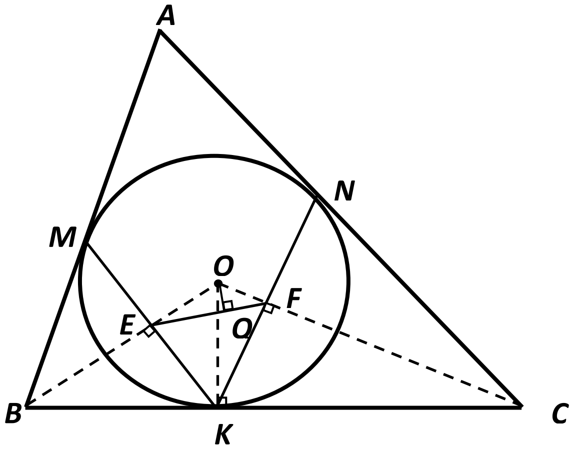
5. Имеются 1999 металлических стержня длинами, соответственно: 1; 2; 3; 4; …; 1999 см. Можно ли из этих стержней, не сгибая их и не разделяя на части, спаять: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед.

Решение. а) Определим сумму длин всех стержней: $\frac{1+1999}{2} \cdot 1999 = 1000 \cdot 1999$. Полученное число не делится на 12, а сумма длин ребер куба, если длины ребер целочисленны, должна делиться на 12.

б) Для того, чтобы изготовить прямоугольный параллелепипед в начале спаяем стержни следующих длин: 1 и 1998, 2 и 1997, 3 и 1996. В результате получим 1000 стержней длиной 1999 см. Из этих стержней, например, можно изготовить куб размером 1999 х 1999 х (248 · 1999).

Ответ: а) нельзя, б) можно.

6. Площадь остроугольного треугольника *ABC* равна *S*. Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *AB*, *AC* и *BC* в точках *M*, *N* и *K* соответственно. Точка *O* – центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Отрезки *BO* и *MK* пересекаются в точке *E*, а отрезки *CO* и *NK* пересекаются в точке *F*. Точка *Q* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *O* на отрезок *EF*. Найдите площадь треугольника *EOF*, если высота треугольника *ABC*, проведенная из вершины *A*, в 3 раза больше радиуса вписанной в треугольник *ABC* окружности и в 12 раз больше *OQ*.



Решение. 1. Треугольники *ABC* и *OBC* имеют общую сторону *BC*, а высота, проведенная к этой стороне, у первого треугольника в 3 раза больше чем у второго. Следовательно, $S_{OBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot S$.

2. BE – биссектриса, медиана и высота треугольника BMA, следовательно, $\angle OEK = 90^0$. Аналогично, $\angle OFK = 90^0$. Значит, около четырехугольника $KEOF$ можно описать окружность.

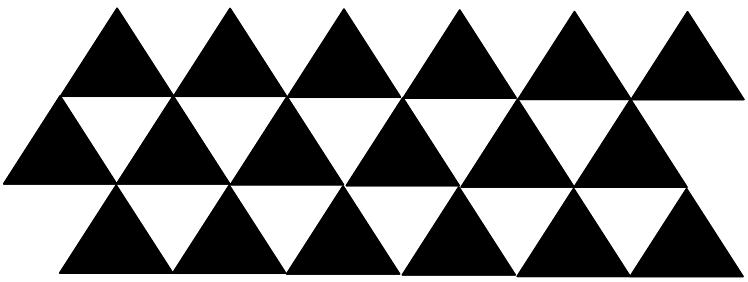
3. Обозначим $\angle OBK = \angle OBA = \beta$, тогда $\angle OKE = 90^0 - \angle KOE = \beta$. $\angle OFE = \angle OKE = \beta$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности описанной около четырехугольника $KEOF$. Следовательно, ΔFEO подобен ΔBCO с коэффициентом подобия $k = \frac{OQ}{OK} = \frac{1}{4}$ (OQ и OK соответствующие высоты этих треугольников). Таким образом, $S_{EOF} = k^2 \cdot S_{BOC} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot S = \frac{S}{48}$.

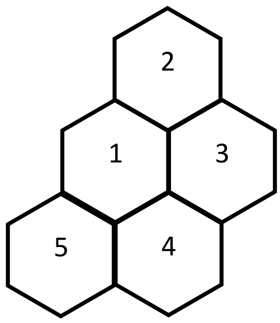
Ответ: $\frac{S}{48}$**.**

7. Равносторонний треугольник перемещают, отражая от одной из его сторон (выбор стороны произволен на каждом шаге). После *n* отражений он вернулся на прежнее место. Может ли *n* быть равно 2017? А если бы перемещался правильный шестиугольник?

Решение. 1. На каждом шаге треугольник будет занимать одно из положений бесконечной сетки (см. рис). Это следует из того, что каждый треугольник этой сетки отображается только в треугольники этой сетки.

2. Все треугольники имеют всего 2 ориентации, причём треугольники первой ориентации (на рисунке они черные) соседствуют лишь с треугольниками 2 ориентации (на рисунке они белые) и наоборот. Таким образом, после чётного числа шагов мы попадём на треугольник той же ориентации, а после нечётного – другой. 2017 – нечётно, значит, мы попадём на треугольник другой ориентации, и не сможем вернуться туда, откуда начали.



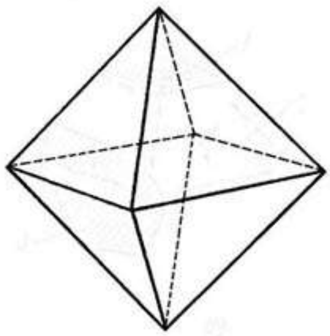


3. Во втором случае выполнив пять перемещений 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1 (см. рисунок) вернемся к исходному шестиугольнику. 2015 кратно 5 и через 2015

шагов шестиугольник мог вернуться в исходное положение. 2016-м шагом можно сделать перемещение в любое соседнее положение, а 2017 вернуться в исходное.

Ответ: в первом случае нет, во втором да.

8. Имеется 8 различных красок. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить ими октаэдр в 8 цветов? В каждом способе раскраски каждая краска используется ровно один раз. Два способа раскраски геометрически одинаковы, если они могут быть переведены друг в друга перемещением октаэдра.



Решение. Общее число способов покрасить 8 граней октаэдра в 8 цветов равно 8! = 40320. Узнаем теперь, сколько способов раскраски геометрически неотличимы от данной. Пусть октаэдр окрашен каким-то образом. Грань, окрашенную в первый цвет, назовём её “базовой”, можно или оставить на месте, или перевести в любую из остальных 7 граней. Всего получается выбор из 8 возможностей. Если этот выбор уже произведен, то существуют 3 самосовмещения октаэдра: его можно повернуть, заменяя каждую грань смежную “базовой” на ей противолежащую, сохраняя “базовую” грань на месте. Получается, что каждый класс геометрически одинаковых раскрасок октаэдра насчитывает 8×3=24 способа раскраски. Таким образом, число геометрически различных способов равно 40320 : 24 = 1680.

2016/2017 УЧЕБНЫЙ ГОД

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

8-9 класс
Вариант 1

1. Решите уравнение.

$\left|x^2 - 2017|x| + 2018\right| = \pi - 4$

2. Все целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 2017 месте?

3. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны *a* и *b*, то их можно заменить на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ из тройки $\left(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

4. Точки *M* и *N* – середины сторон *AB* и *AD* параллелограмма *ABCD*. Прямые *DM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника *AMPN*?

5. Шесть корзин пронумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по ним 20 одинаковых апельсинов так, чтобы ни одна корзина не пустовала?

6. Докажите, что $2017^2 + 2017^2 \cdot 2018^2 + 2018^2$ является квадратом целого числа.

7. Точка пересечения графиков *y=ax+b* и *y=bx+c* отмечена желтым цветом, а точки пересечения этих графиков с осью ординат – зеленым цветом. Ось абсцисс стерта. Как восстановить её, если $a \neq b$, но числа *a* и *b* нам неизвестны.

8. *ABCD* – трапеция, в которой известны длины всех ее сторон. *AB=5, BC=2,CD=12, AD=15,* где *BC* и *AD* – основания трапеции. Найдите площадь *ABCD*.

РЕШЕНИЕ

1. Решите уравнение. $\left|x^2 - 2017|x| + 2018\right| = \pi - 4$

Решение. Число $\pi - 4$ отрицательно. Модуль числа не может быть отрицательным, поэтому уравнение решений не имеет.

2. Все целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 2017 месте?

Решение. На цифры от 1 до 9 уйдет 9 цифр, на двузначные числа от 10 до 90 уйдет 180 цифр. Всего останется *2017 – 189 = 1828* цифр, с помощью которых можно записать *1828 : 3 = 609* трехзначных чисел от 100 до 708. Одна цифра останется для написания следующего трехзначного числа 709. Следовательно, на 2017 месте стоит цифра 7.

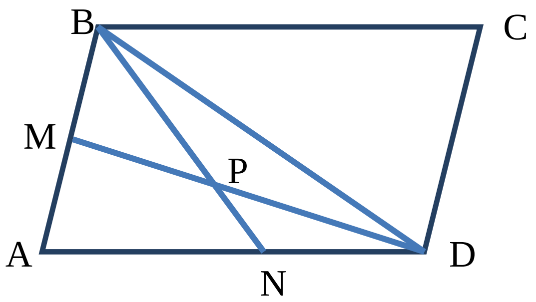
3. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $\left(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$ из тройки $\left(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

Решение. Рассмотрим сумму квадратов чисел тройки *(a, b, c)* до преобразования и тройки $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c\right)$ уже после преобразования. Имеем:

$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Значит, указанное преобразование не изменяет сумму квадратов чисел тройки. Остается рассмотреть суммы квадратов чисел данных троек и убедиться, что их нельзя получить друг из друга.

4. Точки M и N – середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$. Прямые DM и BN пересекаются в точке P. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника $AMPN$?

Решение.



Проведем диагональ *BD*. Тогда *BN* и *DM* – медианы треугольника *ABD*. Следовательно, $S_{AMPN} = \frac{2}{6} S_{\Delta ABD} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$ (так как медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника). Итак, площадь четырехугольника *AMPN* составляет шестую часть от площади параллелограмма *ABCD*.

5. Шесть корзин пронумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по ним 20 одинаковых апельсинов так, чтобы ни одна корзина не пустовала?

Решение. Выложим апельсины в ряд. Для определения расклада апельсинов по корзинам разделим ряд пятью перегородками на шесть групп: первая группа для первой корзины, вторая – для второй и так далее. Таким образом, число вариантов раскладки апельсинов по корзинам равно числу способов расположения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между двадцатью апельсинами 19 перегородок, а крайними должны быть апельсины – это обеспечит наполняемость крайних корзин). Число возможных расположений найдем по формуле $C_{19}^{5} = \frac{19!}{5! \cdot (19-5)!} = 11628$.

6. Докажите, что $2017^2 + 2017^2 \cdot 2018^2 + 2018^2$ является квадратом целого числа.

Решение. Рассмотрим выражение $n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = n^4 + 2n^2(n+1)^2 + (n+1)^2$, которое является полным квадратом при любом значении *n*. В том числе, при *n = 2017*.

7. Точка пересечения графиков *y=ax+b* и *y=bx+c* отмечена желтым цветом, а точки пересечения этих графиков с осью ординат – зеленым цветом. Ось абсцисс стерта. Как восстановить её, если $a \neq b$, но числа *a* и *b* нам неизвестны.

Решение. Найдем точку пересечения графиков функций *y=ax+b* и *y=bx+a*, приравняв их друг другу их значения:

ax+b=bx+a; *(a – b)x=a – b;* *x=1*

y=a+b.

Опустим перпендикуляр из желтой точки *E* на ось ординат, получим точку с координатами *R* (0; *a+b*). Зеленые точки имеют координаты: *A* (0; *a*), *B* (0; *b*). На луче *RA* отложим от точки *R* последовательно отрезки длиной *a* и *b*, получим начало координат. Восстановим из нее перпендикуляр к оси ординат и получим ось абсцисс.

8. *ABCD* – трапеция, в которой известны длины всех ее сторон. *AB=5, BC=2,CD=12, AD=15,* где *BC* и *AD* – основания трапеции. Найдите площадь *ABCD*.

Решение. Проведем $CF \| AB$. *ABCF* – параллелограмм по определению. Значит, *AF=BC=2, CF=AD=5, FD=15-2=13*. Рассмотрим треугольник *CDF*. По теореме, обратной теореме Пифагора, он прямоугольный. Высота *h* треугольника *CDF* также является высотой исходной трапеции. Подсчитаем двумя способами удвоенную площадь треугольника *CDF*: $13 \cdot h = 12 \cdot 5$. Следовательно, $h = \frac{60}{13}$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = 39\frac{3}{13}$.

10-11 классы

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$x^{2017} \cdot \sqrt{x - 2017} + 2017 \cdot \cos\frac{\pi x}{2017} < x^{2018} \cdot \sqrt{2017 - x} + 2017 \cdot \sqrt{2018 - x}$$

2. Существуют ли такие иррациональные числа *a* и *b*, что степень a^b равна числу 2017?

3. Легковерный гражданин занял на три месяца деньги в фирме “Рога и копыта”. Представитель фирмы “Рога и копыта” обещал, что каждый месяц будет начисляться 2% на оставшуюся сумму долга (процентная ставка 2% ежемесячно). Но, благодаря двусмысленностям в договоре, 2% были начислены только в первый месяц, а в каждый из следующих месяцев процентная ставка повышалась на 3%, по сравнению с предшествующим месяцем. Через три месяца гражданин заплатил на 7 834 руб. больше, чем занимал. Какую сумму он занимал? Досрочное погашение было запрещено.

4. Было безошибочно подсчитано, что при подбрасывании двух игральных кубиков сумма выпавших очков *S* получается с вероятностью $\frac{1}{18}$. Чему могло равняться *S*?

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2+14x+40}-4\sqrt{\dfrac{x+4}{x+10}}=\sqrt{\dfrac{x+10}{x+4}}$.

6. На каждой стороне правильного n-угольника, вне его, построен правильный треугольник. В полученной плоской “шестерёнке”, отношение площади правильного n-угольника к сумме площадей правильных треугольников равно $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1$. Чему равно n?

7. В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n ($n > 1$), каждое a_i, начиная с a_2, есть сумма цифр числа a_{i-1}. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2017$.

а) Определите, могло ли n равняться 3;

б) определите, могло ли n равняться 5;

в) найдите наименьшее и наибольшее возможные значения n.

8. Сейф закрыт на кодовый замок, имеющий переключатели, которые могут принимать положение двух видов: —, |. Переключатели расположены в клетках таблицы $(2n + 1) * (2n)$ (где $n \in N$) и первоначально занимают произвольное положение. При повороте одного переключателя вместе с ним поворачиваются все переключатели, находящиеся с ним в одной строке и в одном столбце. Всегда ли можно открыть сейф? Сейф открыт, если все переключатели имеют вид: —. В случаях наличия возможности открытия сейфа опишите соответствующий алгоритм.

РЕШЕНИЕ

1. Решите неравенство

$$x^{2017}\cdot\sqrt{x-2017}+2017\cdot\cos\frac{\pi x}{2017}<x^{2018}\cdot\sqrt{2017-x}+2017\cdot\sqrt{2018-x}$$

Решение. О.Д.З: $x = 2017$. Проверка показывает, что $x = 2017$ является решением неравенства.

Ответ: 2017.

2. Существуют ли такие иррациональные числа *a* и *b*, что степень a^b равна числу 2017?

Решение. Например, $\sqrt{2}^{2\cdot\log_2 2017} = 2^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_2 2017} = 2^{\log_2 2017} = 2017$**.**

Ответ: да, существуют.

3. Легковерный гражданин занял на три месяца деньги в фирме “Рога и копыта”. Представитель фирмы “Рога и копыта” обещал, что каждый месяц будет начисляться 2% на оставшуюся сумму долга (процентная ставка 2% ежемесячно). Но, благодаря двусмысленностям в договоре, 2% были начислены только в первый месяц, а в каждый из следующих месяцев процентная ставка повышалась на 3%, по сравнению с предшествующим месяцем. Через три месяца гражданин заплатил на 7 834 руб. больше, чем занимал. Какую сумму он занимал? Досрочное погашение было запрещено.

Решение. Пусть x руб. величина кредита. Получим уравнение

$$x \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}08 = x + 7\,834;$$

$$x \cdot 0{,}15668 = 7\,834.$$

Ответ: 50 000 руб.

4. Было безошибочно подсчитано, что при подбрасывании двух игральных кубиков сумма выпавших очков *S* получается с вероятностью $\frac{1}{18}$**. Чему могло равняться *S*?**

Решение. Общее количество вариантов $6 \cdot 6 = 36$. Следовательно, сумма S получалась ровно в двух вариантах. Возможные значения

$$S = 3 = 1 + 2 = 2 + 1;$$

$$S = 11 = 5 + 6 = 6 + 5;$$

Ответ: 3 или 11.

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2+14x+40} - 4\sqrt{\dfrac{x+4}{x+10}} = \sqrt{\dfrac{x+10}{x+4}}$**.**

Решение. 1. О.Д.З.: $x \in (-\infty; -4] \cup (-4; +\infty)$.

2. Умножим обе части исходного уравнения на $\sqrt{x^2+14x+40}$, получим уравнение $x^2+14x+40-4\cdot|x+4| = |x+10|$.

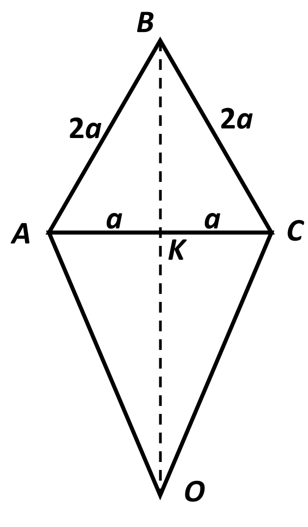
3. Полученное уравнение, с учетом О.Д.З., равносильно совокупности двух систем
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq -4;\\ x^2+14x+40-4\cdot(x+4)=x+10;\end{cases}\\ \begin{cases}x<-10;\\ x^2+14x+40+4\cdot(x+4)=-(x+10).\end{cases}\end{array}\right.$$

4. Из первой системы получим: $x = -2$, второй – $x=\dfrac{-19-\sqrt{97}}{2}$.

Ответ: -2; $\dfrac{-19-\sqrt{97}}{2}$.

6. На каждой стороне правильного *n*-угольника, вне его, построен правильный треугольник. В полученной плоской “шестерёнке”, отношение площади правильного *n*-угольника к сумме площадей правильных треугольников равно $\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1$. Чему равно *n*?

Решение. 1. Рассмотрим часть “шестерёнки”, состоящую из одного правильного треугольника *ABC* и треугольника *AOC*, являющегося частью правильного *n*-угольника (*O* – центр правильного *n*-угольника). Отношение площади правильного *n*-угольника к сумме площадей правильных треугольников равно отношению площади треугольника *AOC* к площади треугольника *ABC*. Отношение площади треугольника *AOC* к площади треугольника *ABC* равно $\dfrac{OK}{BK}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.



2. Введём обозначения, $AK = CK = a$, $AB = AC = BC = 2a$, $\angle COK=\alpha$. Тогда $BK=a\sqrt{3}$, $tg\alpha=\dfrac{CK}{OK}=\dfrac{a}{OK}$, $OK=\dfrac{a}{tg\alpha}$.

3. $\dfrac{OK}{BK}=\dfrac{a}{tg\alpha\cdot a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{tg\alpha\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, $tg\alpha=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

4. $tg(2\alpha)=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{2\cdot(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\dfrac{2\cdot(2-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}-6}=\dfrac{2\cdot(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $2\alpha=30^\circ$.

5. $n=\dfrac{360}{30}=12$.

Ответ: 12.

7. В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n ($n > 1$), каждое a_i, начиная с a_2, есть сумма цифр числа a_{i-1}. Известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2017$.

а) Определите, могло ли n равняться 3;

б) определите, могло ли n равняться 5;

в) найдите наименьшее и наибольшее возможные значения n.

Решение. 1. Остаток от деления 2017 на 9 равен 1. Остаток при делении на 9 натурального числа равен остатку от деления на 9 суммы цифр этого числа.

а) При сложении трёх чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на 9, получить число, дающее при делении на 9 в остатке 1, не удастся.

б) При сложении пяти чисел, имеющих остатки при делении на 9 равные 2, получается число, дающее при делении на 9 в остатке 1. Условию задачи удовлетворяет следующая последовательность: 1991; 20; 2; 2; 2.

в) наименьшее возможное значение n равно 2: 2012 + 5 = 2017.

Наибольшее возможное значение n равно 2017: 1 + 1 + … + 1 = 2017.

Ответ: а) нет; б) да; в) 2 и 2017.

8. Сейф закрыт на кодовый замок, имеющий переключатели, которые могут принимать положение двух видов: —, |. Переключатели расположены в клетках таблицы $(2n + 1) * (2n)$ (где $n \in N$) и первоначально занимают произвольное положение. При повороте одного переключателя вместе с ним поворачиваются все переключатели, находящиеся с ним в одной строке и в одном столбце. Всегда ли можно открыть сейф? Сейф открыт, если все переключатели имеют вид: —. В случаях наличия возможности открытия сейфа опишите соответствующий алгоритм.

Решение. Для определенности будем считать, что столбцов в таблице больше, чем строк.

Заменим переключатели "—" на (– 1), а переключатели "|" на 1, тогда инвариантом будет являться произведение чисел, стоящих в ячейках таблицы (произведение будет оставаться неизменным, так как при каждом повороте переключателя будут поворачиваться $4n$ переключателя, соответственно, $4n$ числа изменят знак.

1 случай. Если количество переключателей вида "—" нечетное число.

Первоначально произведение равно – 1, а в итоге оно должно равняться 1. Следовательно, сейф открыть не удастся?

2 случай. Если количество переключателей вида "—" четное число.

1. При повороте одного из переключателей меняется знак каждого из произведений чисел, находящихся в одной строке таблицы. Если в какой-то момент времени количество строк с произведением равным 1 равно k, то после поворота любого переключателя количество таких произведений будет $2n - k$. А после ещё одного поворота количество строк с произведением равным 1 опять равно k. Таким образом, полностью убрать строки, в которых произведение равно 1, можно лишь в том случае, когда таких строк первоначально $2n$ или 0.

В дальнейшем рассматриваем только случай, когда количество строк с произведением равным 1 равно $2n$ или 0.

2. Рассмотрим часть таблицы размером $(2n) * (2n)$. Преобразуем все переключатели этой части к виду "—" с помощью ниже описанного алгоритма.

3. Инвариантом будет являться положение всех переключателей, кроме выбранного переключателя, если повернуть все переключатели, находящиеся в одном столбце и одной строке с выбранным (выбранный переключатель не поворачиваем). Таким образом, можно изменить вид любого переключателя и постепенно добиться любого положения переключателей.

4. В результате выбранных действий преобразуем так, что переключатели вида "|" могут оставаться только в крайнем левом столбце.

В случае, когда количество строк с произведением равным 1 равно 0, в крайнем левом столбце все переключатели вида "—" и сейф открыт.

В случае, когда количество строк с произведением равным 1 равно $2n$, в крайнем левом столбце все переключатели вида “|”. Повернем $(2n - 1)$ верхних переключателей из крайнего левом столбца и все переключатели, кроме нижнего, из последней строки.

В результате все переключатели примут положение “—”. Пример для таблицы 4 * 5 приведен на рисунках, цветом выделены поворачиваемые переключатели.

|	–	–	–	–	1
|	–	–	–	–	2
|	–	–	–	–	3
|	–	–	–	–	4
a	b	c	d	e	

–	|	|	|	|	1
–	|	|	|	|	2
–	|	|	|	|	3
–	–	–	–	–	4
a	b	c	d	e	

–	–	–	–	–	1
–	–	–	–	–	2
–	–	–	–	–	3
–	–	–	–	–	4
a	b	c	d	e	

Ответ: будем считать, что столбцов в таблице больше, чем строк, если количество строк, содержащих нечетное число переключателей вида “|” равно 0 или $2n$, то сейф открыть можно, в противном случае нельзя.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах.

Каждая задача оценивается по 7- балльной шкале.

Каждая работа должна быть оценена двумя членами жюри. В случае расхождения оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем Жюри или назначенным им ответственным лицом.

Результаты проверки всех работ жюри заносит в итоговую таблицу.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Каждое задание по математике оценивается из расчета 7 баллов - максимум за задание.

В итоге получается суммарное количество баллов за каждую работу В.

Максимально может получиться количество баллов К*7, где К - количество задание в работе.

Чтобы перевести в 100-балльную шкалу оценку ученика по олимпиаде нужно воспользоваться следующей формулой

$$100/(K*7)*B$$

КРИТЕРИИ

определения победителей и призеров

Определение победителей и призеров «Инженерной олимпиады школьников Центра России» по математике осуществляется с учетом результатов заключительного этапа, проведенного в очной форме на территории Липецкого государственного технического университета, а также на всех региональных площадках.

Определение участников, допущенных к участию в заключительном этапе олимпиады, производилось в соответствии с критериями, указанными в п.24 Порядка проведения олимпиад школьников (утвержден приказом Минобрнауки РФ от 4 апреля 2014 г. №267, зарегистрирован Минюстом РФ от 17 июня 2014 года, рег. № 32694) и п.4 Изменений в указанный приказ (утверждены приказом Минобрнауки РФ от 10.12.2014 № 1563, зарегистрированном в Минюсте России 20.01.2015 года, рег. № 35591). Баллы, набранные участниками по результатам проведения отборочных этапов, рассматривались в качестве квалификационных, не суммировались с итоговыми баллами и не учитывались при подведении окончательных результатов и формировании списков победителей и призеров «Инженерной олимпиады школьников Центра России» по математике.

При определении итогового результата каждого участника учитывались частные критерии оценивания, разработанные специально для конкретного задания, и соответствующая балльная система, определенная для каждого задания, которые при последующем суммировании и составляли окончательный рейтинг участника.

Подведение итогов и определение количества победителей и призеров проводилось с учетом ограничений, изложенных в Порядке проведения олимпиад школьников (с изменениями).

Была принята следующая шкала соответствия рейтинга отдельного участника уровню определения победителей и призеров:

	Диплом I степени	***Диплом II степени***	***Диплом III степени***
8 класс	71 – 100	61 – 70	57 – 60
9 класс	71 – 100	61 – 70	50 – 60
10 класс	71 – 100	60,5 – 70	53 – 60
11 класс	70 – 100	61 – 69	52 – 60